مراد کریمی شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان پسرانه شاهد شهرکرد

حاصل‌ضرب جمله‌های دنبالهٔ هندسی متناهی

نکته: در هر دنبالهٔ هندسی متناهی حاصل‌ضرب جمله‌هایی که از دو طرف تصاعد به یک فاصله هستند، مقداری است ثابت و برابر است با حاصل‌ضرب جملهٔ اول در جملهٔ آخر و اگر تعداد جملات فرد باشد برابر است با مجذور جملهٔ وسط.

یعنی:

جملات یک دنبالهٔ هندسی : $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$

$$\Rightarrow t_1.t_n = t_2.t_{n-1} = \ldots$$

توجه: نکتهٔ فوق به قانون اندیس‌ها معروف است و به زبان ریاضی یعنی:

برای چهار جمله از دنبالهٔ هندسی $m+n=P+r \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_P \times t_r$

برای سه جمله از دنبالهٔ هندسی $m+n=2P=P+P \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_P^2$

قضیه: اگر t_1، t_2، ... و t_n جملات یک دنبالهٔ هندسی متناهی باشند، نشان دهید حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\sqrt{(t_1.t_n)^n}$ است.

اثبات: اگر حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی متناهی را با P_n نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$P_n = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \ldots \times t_{n-2} \times t_{n-1} \times t_n \quad (1)$$

$$P_n = t_n \times t_{n-1} \times t_{n-2} \times t_3 \times t_2 \times t_1 \quad (2)$$

دو طرف روابط (۱) و (۲) را نظیربه‌نظیر در یکدیگر ضرب می‌کنیم و با توجه به نکتهٔ فوق نتیجه می‌شود:

$$P_n^2 = (t_1.t_n) \times (t_2.t_{n-1}) \times (t_3 \times t_{n-2}) \times \ldots \times (t_{n-2} \times t_3) \times (t_{n-1} \times t_2) \times (t_n \times t_1)$$

$$P_n^2 = (t_1.t_n) \times (t_1.t_n) \times (t_1.t_n) \times \ldots \times (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) = (t_1 \times t_n)^n$$

$$\Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \times t_n)^n}$$

مثال ۱. حاصل‌ضرب جمله‌های دنباله‌های هندسی متناهی زیر را به‌دست آورید:

الف) $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \times t_n)^n}$

$$\Rightarrow P_4 = \sqrt{(8 \times \frac{1}{8})^4} = \sqrt{1} = 1$$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81} \Rightarrow P_n = \sqrt{(\frac{1}{3} \times \frac{8}{81})^4}$

$$= \sqrt{(\frac{8}{3 \times 81})^4} = (\frac{8}{3 \times 81})^2 = \frac{64}{3^{10}}$$

مثال ۲. یک دنبالهٔ هندسی متناهی پنج جمله دارد. جملهٔ اول آن $2\sqrt{3}$ و قدرنسبت $\sqrt{2}$ است. حاصل‌ضرب جمله‌های آن را حساب کنید.

حل: ابتدا به کمک معلومات، جملهٔ آخر را به‌دست می‌آوریم و سپس حاصل‌ضرب جملات را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} n = 5 \\ t_1 = 2\sqrt{3} \\ q = \sqrt{2} \end{cases}$$

جملهٔ پنجم $t_5 = t_1 \times q^4 = 2\sqrt{3} \times (\sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}$

$$P_5 = \sqrt{(2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3})^5} = \sqrt{(16 \times 3)^5} = \sqrt{4^{10} \times 3^5}$$

$$= \sqrt{4^5 \times 4^5 \times 3^2 \times 3^3} = 9 \times 4^5 \times \sqrt{3}$$

مثال ۳. در یک دنبالهٔ هندسی داریم: $t_1 = -16$، $q = \frac{1}{2}$ و $n=5$. P_5 را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} n = 5 \\ t_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \\ P_5 = ? \end{cases}$$

$$t_5 = t_1 \times q^4 = (-16) \times (\frac{1}{2})^4 = -1$$

$$P_5 = \sqrt{(t_1.t_5)^5} = \sqrt{[(-16) \times (-1)]^5}$$

$$= \sqrt{16^5} = \sqrt{(2^4)^5} = \sqrt{2^{20}} = 2^{10} = 1024$$

تمرین

۱. در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جملات اول، دوم، نهم و دهم مساوی ۴ است. حاصل‌ضرب ۱۰ جملهٔ اول آن را بیابید.

۲. در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جمله‌های سوم و یازدهم مساوی با جملهٔ چهاردهم است. حاصل‌ضرب ۱۰ جملهٔ اول آن را بیابید.